LXX Olimpiada Matematyczna

Terminarz zawodów:

Zawody I stopnia:
3.09-5.10.2018 r.,
6.10-5.11.2018 r.,
6.11-5.12.2018 r.

Zawody II stopnia:
8 i 9 lutego 2019 r.

Zawody III stopnia (finał):
3 i 4 kwietnia 2019 r.

Wszystkich przyszłych maturzystów zapraszamy do udziału w **LXX Olimpiadzie Matematycznej**. Zawody są trójstopniowe.

Zawody pierwszego stopnia składają się z trzech serii zadań.

Do zakwalifikowania się do zawodów drugiego stopnia nie jest konieczne rozwiązanie wszystkich zadań zawodów pierwszego stopnia.
Wszelkie niezbędne informacje, w tym zadania i regulamin, znajdują się na stronie: **www.om.edu.pl**

Tam znajdują się również aktualne adresy komitetów okręgowych Olimpiady. Rozwiązania zadań należy przesłać listem poleconym do komitetu okręgowego właściwego terytorialnie dla szkoły.

Uczestnicy z zagranicy przesyłają prace do komitetu okręgowego w Warszawie.

Uczestnicy zawodów finałowych (III stopnia) uzyskają:

– maksymalną ocenę z matury z matematyki,
– prawo wstępu na wiele wyższych uczelni zgodnie z decyzjami ich senatów.

Zwycięzcy będą reprezentować Polskę na:

– LX Międzynarodowej Olimpiadzie Matematycznej, która odbędzie się w Anglii,
– XIII Środkowoeuropejskiej Olimpiadzie Matematycznej,
– XXX Zawodach Państw Bałtyckich,
– VIII Europejskiej Olimpiadzie Matematycznej Dziewcząt.

Adresy Komitetów Okręgowych Olimpiady Matematycznej

- Dla województwa pomorskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Gdańskiego, ul. Wita Stwosza 57, 80–952 Gdańsk.
- Dla województwa śląskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Śląskiego, ul. Bankowa 14, 40-007 Katowice.
- Dla województwa małopolskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Jagiellońskiego, ul. Łojasiewicza 6, 30-348 Kraków.
- Dla województwa lubelskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Zakład Rachunku Prawdopodobieństwa pok. 810, Instytut Matematyki Uniwersytetu Marii Curie-Skłodowskiej, pl. Marii Curie-Skłodowskiej 1, 20-031 Lublin.
- Dla województwa łódzkiego i świętokrzyskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Łódzkiego, ul. Banacha 22, 90-238 Łódź.
- Dla województwa wielkopolskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Adama Mickiewicza, ul. Umultowska 87, B1-21, 61-614 Poznań.
- Dla województwa podkarpackiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Wydział Matematyczno-Przyrodniczy Uniwersytetu Rzeszowskiego, ul. Pigonia 1, 35-959 Rzeszów
- Dla województwa lubuskiego i zachodniopomorskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Szczecińskiego, ul. Wielkopolska 15, 70-451 Szczecin.
- Dla województwa kujawsko-pomorskiego i warmińsko-mazurskiego: — Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, ul. Chopina 12/18, 87-100 Toruń.
- Dla województwa mazowieckiego i podlaskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk, ul. Śniadeckich 8, 00-656 Warszawa.
- Dla województwa dolnośląskiego i opolskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyczny Uniwersytetu Wrocławskiego, pl. Grunwaldzki 2/4, 50-384 Wrocław.

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w Internecie pod adresem: www.om.edu.pl

Olimpiada Matematyczna finansowana jest ze środków Ministerstwa Edukacji Matematycznej
Organizatorem Olimpiady Matematycznej jest Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Olimpiada Matematyczna objęta jest honorowym patronatem Polskiego Towarzystwa Matematycznego

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

rok zał. 1919 ptm

LXX Olimpiada Matematyczna

LXX Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia pierwszego
I seria: 3 września 2018 r. — 5 października 2018 r.

1. Rozstrzygnąć, czy istnieje taka dodatnia liczba całkowita k, że w zapisie dziesiętnym liczby 2^k każda z cyfr $0, 1, \ldots, 9$ występuje taką samą liczbę razy.

2. Wysokości nierównoramiennego, ostrokątnego trójkąta ABC przecinają się w punkcie H. Punkt S jest środkiem tego łuku BC okręgu opisanego na trójkącie BCH, który zawiera punkt H. Wyznaczyć miarę kąta BAC, jeśli spełniona jest równość $AH = AS$.

3. Rozstrzygnąć, czy istnieją takie parami różne liczby wymierne a, b, c, że wielomiany

$$P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \quad \text{i} \quad Q(x) = x^3 + bx^2 + cx + a$$

mają wspólny pierwiastek niewymierny.

4. Szachownicę o wymiarach 2018×2018 przykryto przy pomocy jednej kwadratowej płytki o wymiarach 2×2 oraz $\frac{2018^2-4}{5}$ prostokątnych płytek o wymiarach 1×5 w taki sposób, że każde pole szachownicy jest przykryte przez dokładnie jedną płytkę (płytki można obracać). Wykazać, że płytka 2×2 nie przykrywa żadnego pola o krawędzi zawartej w brzegu szachownicy.

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać listem poleconym na adres komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

5 października 2018 r.

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane. Rozwiązanie każdego zadania należy podpisać w lewym górnym rogu pierwszej jego strony: imieniem i nazwiskiem, swoim adresem, swoim adresem elektronicznym oraz klasą, nazwą i adresem szkoły.

LXX Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia pierwszego
II seria: 6 października 2018 r. — 5 listopada 2018 r.

5. Wyznaczyć wszystkie szóstki $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ liczb rzeczywistych o następującej własności: dla $i = 1, 2, 3$ liczby a_{i+1} i b_{i+1} są różnymi pierwiastkami równania $x^2 + a_i x + b_i = 0$, przy czym przyjmujemy $a_4 = a_1$ oraz $b_4 = b_1$.

6. Sto osób usiadło w równych odstępach przy okrągłym, obrotowym stole. Każda z osób zamówiła lody, przy czym 51 osób zamówiło lody śmietankowe, a pozostałe 49 osób zamówiło lody czekoladowe. Przed każdą z osób postawiono lody o smaku niekoniecznie zgodnym z jej zamówieniem, przy czym w sumie podano 51 lodów śmietankowych oraz 49 czekoladowych. Wykazać, że stół można tak obrócić, by co najmniej 52 osoby miały przed sobą lody w zamówionym przez siebie smaku.

7. Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD. Punkty P i Q leżą odpowiednio na ramionach BC i AD, przy czym $\sphericalangle APB = \sphericalangle CPD$ oraz $\sphericalangle AQB = \sphericalangle CQD$. Udowodnić, że symetralna odcinka PQ przechodzi przez punkt przecięcia przekątnych trapezu $ABCD$.

8. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite $n \geqslant 1$, dla których w pola kwadratowej tablicy o wymiarach $n \times n$ można tak wpisać parami różne kwadraty liczb całkowitych, by suma liczb w każdym wierszu i w każdej kolumnie tablicy była kwadratem liczby całkowitej oraz te $2n$ sum było parami różnych.

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać listem poleconym na adres komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

5 listopada 2018 r.

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane. Rozwiązanie każdego zadania należy podpisać w lewym górnym rogu pierwszej jego strony: imieniem i nazwiskiem, swoim adresem, swoim adresem elektronicznym oraz klasą, nazwą i adresem szkoły.

LXX Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia pierwszego
III seria: 6 listopada 2018 r. — 5 grudnia 2018 r.

9. Dany jest czworościan $ABCD$, którego wszystkie ściany są ostrokątne. Punkt X jest środkiem dłuższego łuku BC okręgu opisanego na ścianie BCD. Punkt Y jest środkiem dłuższego łuku CA okręgu opisanego na ścianie CAD. Punkt Z jest środkiem dłuższego łuku AB okręgu opisanego na ścianie ABD. Udowodnić, że punkty D, X, Y, Z leżą na jednym okręgu.

10. Dowieść, że jeśli dodatnie liczby całkowite x, y, z, t spełniają równanie

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 2018!\,,$$

to każda z liczb x, y, z, t jest większa od 10^{250}.

11. W turnieju badmintona wzięło udział $2n$ zawodników, gdzie $n \geqslant 15$ jest liczbą całkowitą. Każda para zawodników rozegrała dokładnie jeden mecz, nie było remisów. Gdy dla każdego zawodnika policzono, z iloma innymi zawodnikami wygrał, to okazało się, że żadnych pięciu zawodników nie uzyskało takiego samego wyniku. Wykazać, że zawodników można tak podzielić na grupy A i B, każdą złożoną z n zawodników, by wśród meczów pomiędzy zawodnikami z grupy A i zawodnikami z grupy B co najmniej 60% było wygranych przez zawodników z grupy A.

12. Dana jest dodatnia liczba całkowita k. Ciąg dodatnich liczb rzeczywistych $a_1, a_2, a_3, \ldots$ spełnia równość

$$a_{n+1} = a_n + \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \qquad \text{dla wszystkich } n \geqslant k.$$

Wykazać, że istnieje taka dodatnia liczba całkowita N, że

$$N^k \leqslant a_N \leqslant \left(1 + \frac{1}{k}\right)^N.$$

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać listem poleconym na adres komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

5 grudnia 2018 r.

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane. Rozwiązanie każdego zadania należy podpisać w lewym górnym rogu pierwszej jego strony: imieniem i nazwiskiem, swoim adresem, swoim adresem elektronicznym oraz klasą, nazwą i adresem szkoły.